Vector, scalar and tensor
सदिश, अदिश एवं टेंसर

Magnitude (परिमाण) – एक physical quantity का absolute value उसका magnitude कहलाता है।

Ex–(i) Let work $W = 24J$

यहाँ work का magnitude $= 24J$

(ii) Let force $\vec{F} = -15\ N$ x-axis में

force का magnitude $= 15\ N$

(iii) Let refractive index $\mu = 1.5$

Refractive index का magnitude $= 1.5$

⇒ अधिकांश quantities का magnitude उसका numerical value एवं unit के द्वारा पूरा होता है लेकिन सभी के लिए ऐसा नहीं है।

Specific direction (विशिष्ट दिशा) – वह direction जिसे space में बतलाया जा सकता है, specific direction कहलाता है।

Magnitude एवं direction के आधार पर physical quantities को तीन group में बाँटा गया है।

(a) Scalar (अदिश), (b) Vector (सदिश) एवं (c) tensor (टेंसर)

Scalar – वह physical quantity जिसका representation केवल magnitude के द्वारा होता है, scalar कहलाता है।

(A physical quantity which representation requires only magnitude is called scalar.)

Ex- distance, speed, work, energy, power, charge, electric potential, electric flux, etc.

Representation of scalar

(i) Work $W = 24\,J$, (ii) speed $v = 2\,m\,s^{-1}$

(iii) Charge $q = 25\,C$ (iv) Electric flux $\phi = 120\,V\,m^{-1}$

⇒ एक scalar का direction हो सकता है, लेकिन direction specific नहीं होता है

Ex- Electric current एवं time का direction है लेकिन जैसा कि direction specific नहीं होता है अत: दोनों vector नहीं हैं।

⇒ दो scalars जिनके dimensional formula same होते हैं, उन्हें simple algebric law से add एवं subtract किया जाता है।

Ex- माना Kinetic energy $K = 24\,J$

Potential energy $U = 12\,J$

तब total mechanical energy

$$E = K + U = 24\,J + 12\,J = 36\,J$$

⇒ दो scalars को simple algebric law से multiply एवं divide किया जाता है।

Ex- माना work $W = 24\,J$

time $t = 4\,s$

तब power

$$P = \frac{W}{t} = \frac{24\,J}{4\,s} = 6\,W.$$

Vector (सदिश) - वह physical quantity जिसे represent करने के लिए magnitude के साथ-साथ specific direction भी आवश्यक होता है. Vector कहलाता है। (A physical quantity which representation requires both magnitude and specific direction is called vector.)

Ex - displacement, velocity, acceleration, force, momentum, impulse, torque, electric field, magnetic field etc.

Magnitude of vector - सदिश का परिमाण - एक vector का magnitude negative नहीं होता है। जैसा कि किसी भी quantity का modulus भी negative नहीं होता है इसीलिए एक vector का modulus उसका magnitude को बतलाता है।

ex - Vector $\vec{A}$ का magnitude $= |\vec{A}|$

Vector $\vec{B}$ का magnitude $= |\vec{B}|$

Let Velocity

$\vec{V} = 10\ m s^{-1}$ in x-axis

$|\vec{V}| = 10\ m s^{-1}$

Force

$\vec{F} = -15\ N$ along west

$|\vec{F}| = 15\ N$

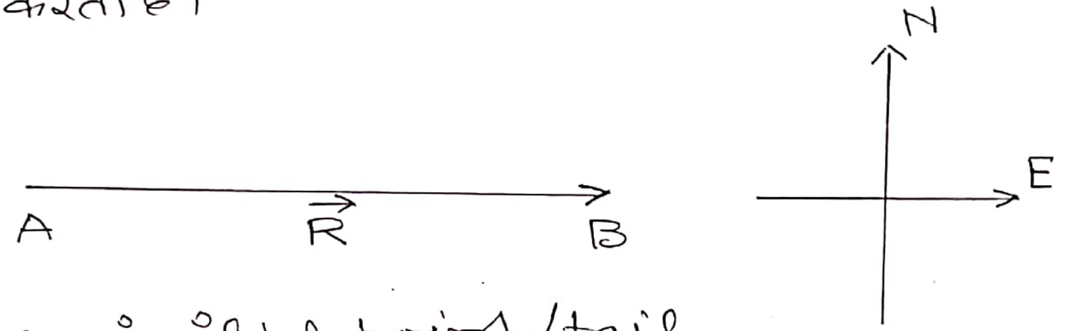
⇒ (-)ve sign का प्रयोग direction को स्पष्ट करने के लिए किया जाता है।

Notation of a vector (सदिश का संकेत) –

Vector A को $\vec{A}$ या ***A*** (bold italic letter) से संकेत किया जाता है।

Geometrical representation of a vector – (सदिश का ज्यामितिक निरूपण)

एक vector को arrow लगा हुआ line segment से represent किया जाता है। Line segment का length उसका magnitude को बतलाता है जबकि arrow की direction vector की direction को स्पष्ट करता है।



A = initial point/tail

B = terminal point/head

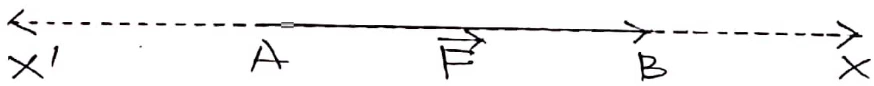
$|\vec{R}| = AB$

$\vec{R}$ का direction = east

⇒ Line segment का length scale पर आधारित होता है एवं magnitude का proportional होता है।

Line of action of a vector (सदिश का क्रियाशील रेखा)

वह straight line जो एक vector की line segment के संरेखित होता है, vector का line of action कहलाता है।



X'X = line of action of force

⇒ एक vector को parallely translate करने पर वह change नहीं करता है।

⇒ एक vector को angle $\theta = 2n\pi$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ से rotate करने पर वह change नहीं करता है।

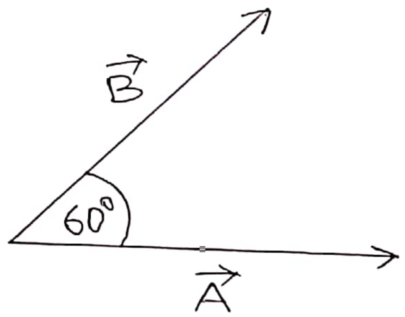
⇒ एक vector को nonparallely translate करने पर वह change कर जाता है।

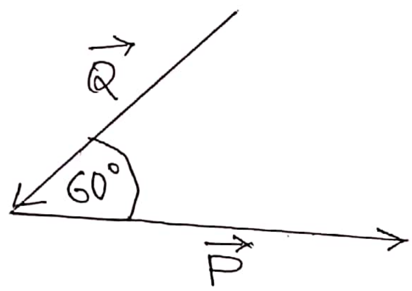
⇒ एक vector को angle $\theta \neq 2n\pi$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ से rotate करने पर वह change कर जाता है।

Angle between two vectors

जब दो vectors के या तो initial point या terminal point common होते हैं तब दोनों के line segments के बीच का small angle vectors के बीच का angle कहलाता है।

$\vec{A}$ एवं $\vec{B}$ के बीच का angle $\theta = 60^\circ$

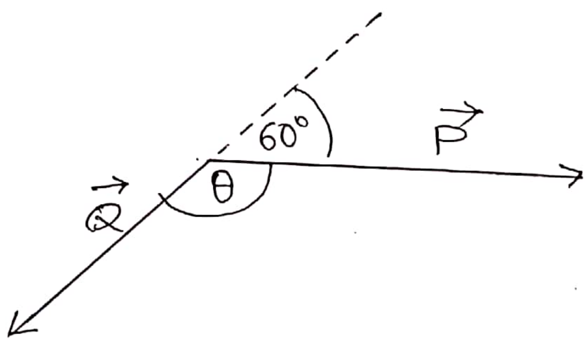




$\vec{P}$ एवं $\vec{Q}$ के बीच का angle

$\theta = 180^\circ - 60^\circ$

$= 120^\circ$



Type of vectors

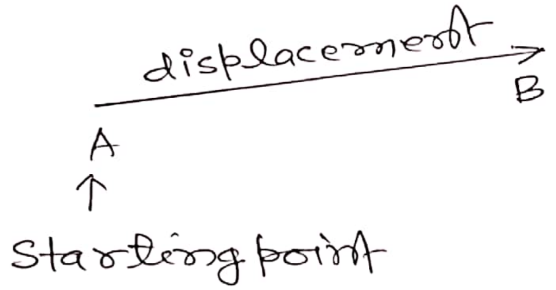
Mainly vectors दो types के होते हैं-

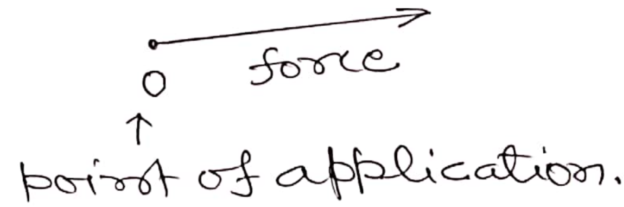
(1) Polar Vector (ध्रुवीय सदिश)

(2) Axial Vector (अक्षीय सदिश)
or
Pseudo vector (छद्म सदिश)

Polar Vector - वह Vector जो किसी भी axis की स्थिति पर निर्भर नहीं करता है तथा जिसे या तो starting point या point of application होता है, polar vector कहलाता है।

Ex - displacement, force, momentum etc

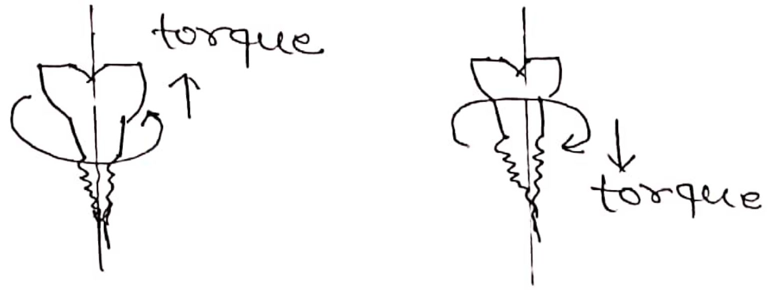




Axial vector/Pseudo Vector - वह Vector जो एक axis की स्थिति पर निर्भर करता है एवं axis की direction में होता है, axial vector कहलाता है।

Ex - Torque (बल आघूर्ण), angular displacement, angular velocity, angular acceleration, angular momentum etc.

⇒ Axial Vector sense of rotation पर भी निर्भर करता है।



Common type of vectors

Proper vector – वह vector जिसका magnitude nonzero होता है, proper vector कहलाता है।

Zero vector – वह vector जिसका magnitude zero होता है, zero vector कहलाता है।

⇒ zero vector दो या दो से अधिक vectors का resultant होता है।

⇒ zero vector का direction ज्ञात नहीं किया जा सकता है, इसकी direction कोई भी लिया जा सकता है।

⇒ Let $\vec{0}$ = zero vector तब

$$\vec{A} + \vec{0} = \vec{A}$$
$$\vec{A} - \vec{0} = \vec{A}$$
$$\vec{A} \cdot \vec{0} = 0$$
$$\vec{A} \times \vec{0} = \vec{0}$$

Unit vector – वह Vector जिसका magnitude 1 (one) होता है, unit vector कहलाता है।

⇒ Unit vector $\vec{A}$ को $\hat{A}$ से भी denote किया जाता है।

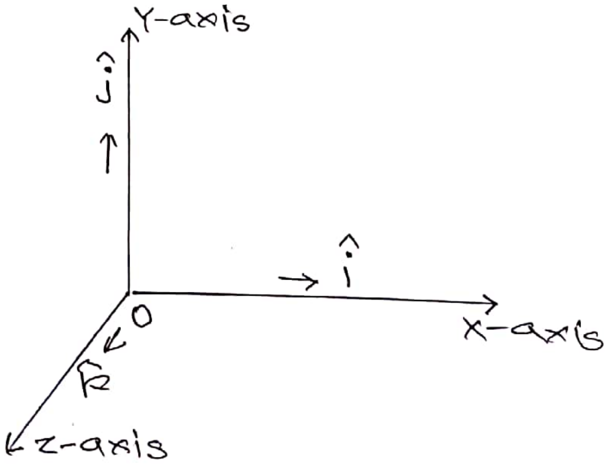
⇒ एक direction में unit vector को ज्ञात करने के लिए उस vector को उसका magnitude से devide किया जाता है।

ex- $\vec{A}$ की direction में एक unit vector

$$\hat{u} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

⇒ Unit vector unitless होता है।

⇒ तीन perpendicular directions x-axis, Y-axis एवं z-axis में unit vectors को क्रमशः $\hat{i}$, $\hat{j}$ एवं $\hat{k}$ से संकेत किया जाता है।



⇒ Unit vector का प्रयोग direction को स्पष्ट करने के लिए किया जाता है।

ex- Let force $\vec{F} = 15N$ in x-axis

then $\vec{F} = (15N)\hat{i}$

Velocity $\vec{v} = 10\, ms^{-1}$ in Y-axis

then $\vec{v} = (10\, ms^{-1})\hat{j}$

When force $\vec{F} = 8N$ in x-axis and 6N in Y-axis

then $\vec{F} = (8N)\hat{i} + (6N)\hat{j}$

Parallel Vectors - vectors जिनके direction एक ही होते हैं, parallel vectors कहलाते हैं।

ex- $\vec{A} = 6m\,\hat{i}$,

$\vec{B} = 10m\,\hat{i}$.

⇒ Parallel vectors के बीच 0° का angle बनता है।

⇒ Parallel vectors के magnitude अलग-अलग हो सकते हैं।

⇒ Parallel vectors के dimension अलग-अलग हो सकते हैं।

Antiparallel Vectors - दो vectors जिनके direction ठीक opposite होते हैं, antiparallel vectors कहलाते हैं।

ex- $\vec{P} = 6m\,\hat{i}$, $\vec{Q} = -8m\,\hat{i}$

⇒ Antiparallel vectors के बीच का angle 180° होता है।

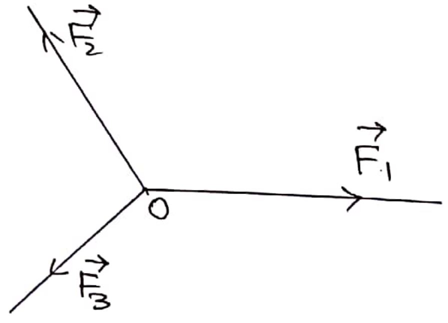
Coaxial Vectors/Colinear Vectors - Parallel vectors एवं antiparallel vectors को सम्मिलित रूप में coaxial vectors कहा जाता है।

ex - $\vec{A} = 6m\,\hat{i}$, $\vec{B} = 8m\,\hat{i}$, $\vec{C} = -5m\,\hat{i}$

⇒ Coaxial vectors के बीच का angle 0° या 180° हो सकता है।

Coinitial Vectors - vectors जिनके initial point same होते हैं, coinitial vectors कहलाते हैं।

Figure में forces $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ एवं $\vec{F_3}$ coinitial forces हैं।



Coplaner vectors - vectors जो एक ही plane में अवस्थित होते हैं coplaner vectors कहलाते हैं।

ex - $\vec{A} = 2m\hat{i} + 3m\hat{j}$

$\vec{B} = 5m\hat{i} + 8m\hat{j}$

Equal Vectors - दो vectors जिनके magnitude, unit एवं direction identical होते हैं, equal vectors कहलाते हैं।

ex - $\vec{A} = 4m\hat{i} + 6m\hat{j}$

$\vec{B} = 4m\hat{i} + 6m\hat{j}$

⇒ Equal vectors के बीच का angle $0°$ होता है अतः equal vectors parallel vectors भी होते हैं।

⇒ Equal vectors का difference एक zero vector ($\vec{0}$) होता है।

Opposite vectors/Negative vectors - दो vectors जिनके magnitude equal लेकिन direction ठीक opposite होते हैं, opposite vectors कहलाते हैं।

ex - $\vec{P} = 2m\hat{i} + 3m\hat{j}$

$\vec{Q} = -2m\hat{i} - 3m\hat{j}$

⇒ opposite vectors के बीच का angle $180°$ होता है। अतः opposite vectors antiparallel vectors होते हैं।

⇒ Opposite vectors का addition sum एक zero vector होता है।

Free vector - वह vector जिसका initial point located नहीं होता है, free vector कहलाता है।

ex - $\vec{S} = 10m$ along x-axis

Localised Vector - वह vector जिसका initial point located होता है, localised vector कहलाता है।

ex - $\vec{S} = 10m$ along x-axis from origin.

Practice problems -

(1) निम्नलिखित में कौन vector को represent करता है -

(A) $\longleftrightarrow$ (B) $\longrightarrow$ (C) $\overleftarrow{A}$ (D) $\vec{A}$

(2) यदि $\hat{u} = \vec{A}$ की direction में unit vector है तब सही relation का चुनाव करें।

(A) $\vec{A} = A u$ (B) $\vec{A} = |\vec{A}| u$

(C) $\vec{A} = |\vec{A}| \hat{u}$ (D) None of these

(3) X-axis में unit vector है -

(A) $\hat{i}$ (B) $\hat{j}$ (C) $\hat{k}$ (D) $-\hat{i}$

(4) निम्नलिखित में से कौन Y-axis में 6 N का force को स्पष्ट करता है।

(A) $(6\,N)\hat{i}$ (B) $(6\,N)\hat{j}$ (C) $(6\,N)\hat{k}$ (D) $(-6\,N)\hat{i}$

(5) x-axis में $10\,m\,s^{-1}$ का velocity को represent करता है।

(A) $(10\,m\,s^{-1})\hat{i}$ (B) $(-10\,m\,s^{-1})\hat{i}$ (C) $(10\,m\,s^{-1})\hat{j}$ (D) $(10\,m\,s^{-1})\hat{k}$

(6) जब $|\vec{A}| = 1$, तब $\vec{A}$ है -

(A) zero vector (B) Unit vector

(C) Axial vector (D) None of these

(7) माना $\vec{A} + \vec{B} = \vec{0}$ (zero vector) तब $\vec{A}$ एवं $\vec{B}$ है -

(A) Equal vectors (B) Opposite vectors

(C) Parallel vectors (D) Antiparallel vectors

(8) माना $\vec{A} - \vec{B} = \vec{0}$ (zero vector) तब $\vec{A}$ एवं $\vec{B}$ है -

(A) Equal vectors (B) Opposite vectors

(C) Parallel vectors (D) Antiparallel vectors

Ans - (1) - B, D (2) - C (3) - A (4) - B

(5) - A (6) - B (7) - B, D (8) - A, C

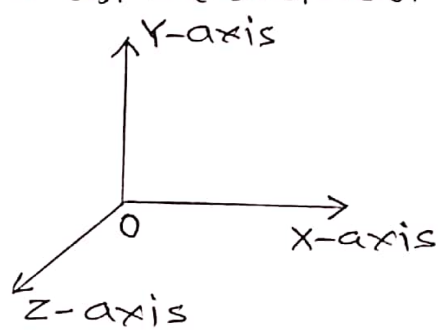
Comprehension

Questions (9 से 12) तक का answer नीचे की statement के आधार पर देना है।-

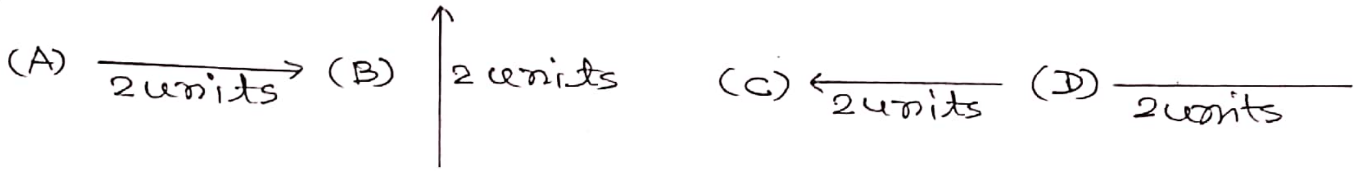
$\vec{A} = (2 \text{ units})\,\hat{i}$

$\vec{B} = (3 \text{ units})\,\hat{j}$

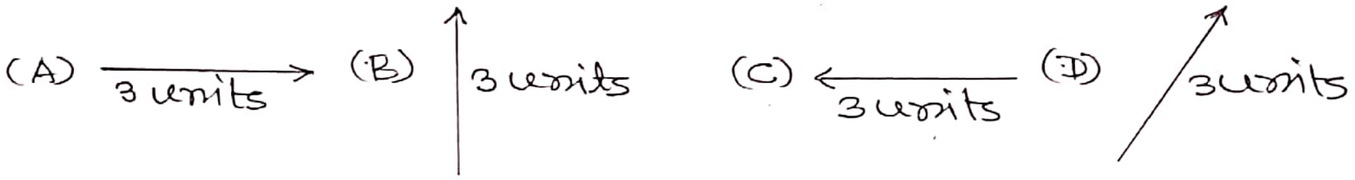
$\hat{i}, \hat{j}$ एवं $\hat{k}$ क्रमशः x-axis, y-axis एवं z-axis में unit vectors हैं।



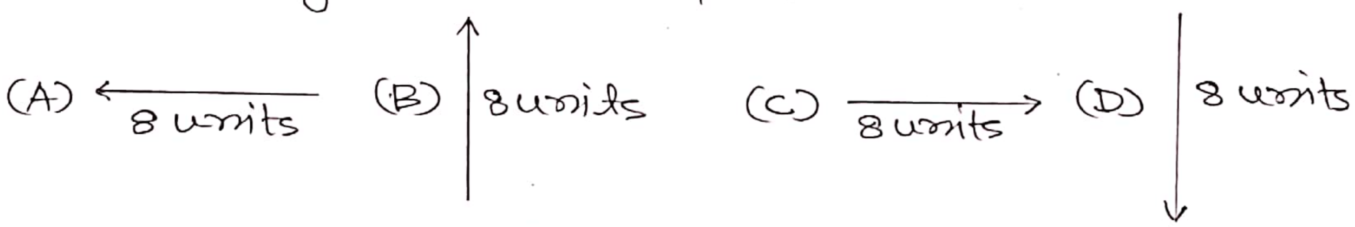
(9) $\vec{A}$ का geometrical representation है -



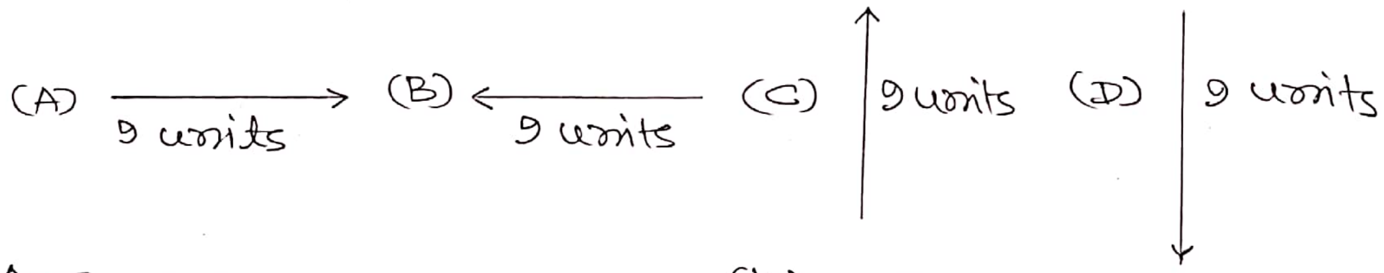
(10) $\vec{B}$ का geometrical representation है -



(11) $-4\vec{A}$ का geometrical representation है -



(12) $3\vec{B}$ का geometrical representation है -



Ans- (9) - A   (10) - B

(11) - A   (12) - C

Addition of Vectors (सदिशों का जोड़)

दो या दो से अधिक Vectors को addition का specific rules के द्वारा add/subtract किया जाता है। Addition rules of vectors निम्नलिखित है:-

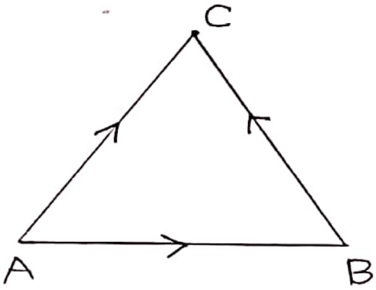
(A) Triangle rule of addition of vectors -
सदिशों के जोड़ का त्रिभुज नियम - जब दो vectors को एक triangle के एक ही order में दो sides के द्वारा represent किया जाता है तब triangle का तीसरा side opposite order में resultant vector sum को स्पष्ट करता है।

Δ ABC में

$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

या

$\vec{AC} + \vec{CB} = \vec{AB}$

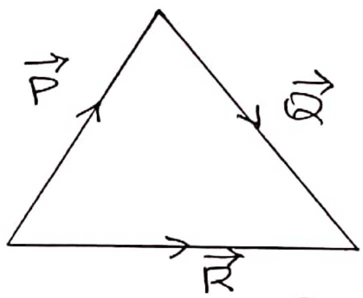


Ex(1) - नीचे दिखलाए गए figure में सही relation का चुनाव करें।

(A) $\vec{P} + \vec{Q} = \vec{R}$ (B) $\vec{Q} + \vec{R} = \vec{P}$

(C) $\vec{P} + \vec{R} = \vec{Q}$ (D) $\vec{P} + \vec{Q} + \vec{R} = 0$

Ans - (A)

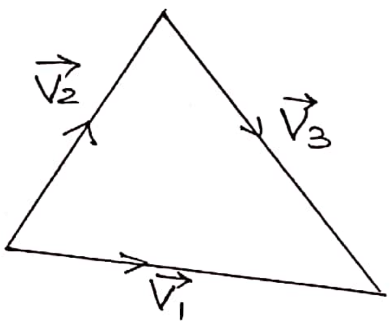


Ex(2) - Figure में दिखलाए गए Vectors के बीच सही relation का चुनाव करें।

(A) $\vec{V_2} - \vec{V_1} = \vec{V_3}$ (B) $\vec{V_2} - \vec{V_3} = \vec{V_1}$

(C) $\vec{V_1} - \vec{V_2} = \vec{V_3}$ (D) $\vec{V_1} + \vec{V_2} = \vec{V_3}$

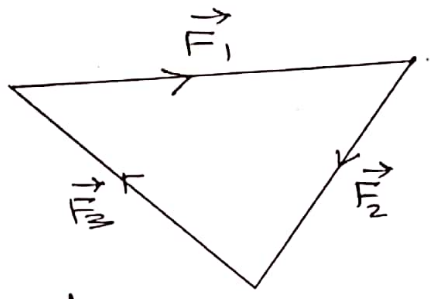
Ans - (C)



Ex(3) - नीचे की figure के अनुसार $\vec{F_1}, \vec{F_2}$ एवं $\vec{F_3}$ के बीच सही relation है -

(A) $\vec{F_1}+\vec{F_2}=\vec{F_3}$ (B) $\vec{F_2}+\vec{F_3}=\vec{F_1}$

(C) $\vec{F_3}+\vec{F_1}=\vec{F_2}$ (D) $\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3}=0$



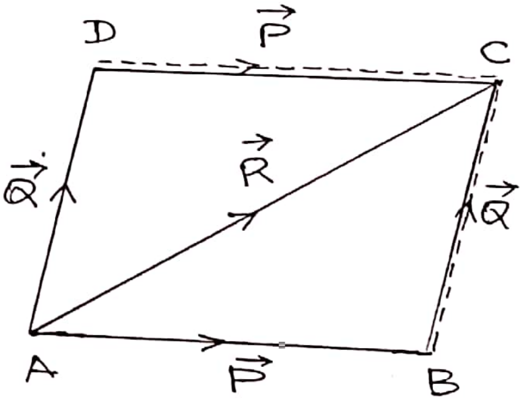
Ans - (D)

(B) Parallelogram law of addition of vectors
<u>सदिशों के जोड़ का समान्तर चतुर्भुज नियम</u>

जब दो Vectors के initial points को common रखकर दो vectors को adjacent मानकर एक parallelogram तैयार किया जाता है तब parallelogram का वह diagonal जो दोनों vectors के initial point से गुजरता है resultant vector sum को बतलाता है।

Figure में

$\vec{AB}=\vec{P}, \ \vec{AD}=\vec{Q}, \vec{AC}=\vec{R}$



Parallelogram law से

$\vec{AB}+\vec{AD}=\vec{AC}$

$\therefore \quad \vec{P}+\vec{Q}=\vec{R}$

⇒ Parallelogram rule में triangle rule का पालन स्वतः होता है।

$$\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC}$$
$$\vec{P}+\vec{Q}=\vec{R}$$

⇒ Vectors का addition commutative होता है -

ΔABC में	ΔADC में
$\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC}$	$\vec{AD}+\vec{DC}=\vec{AC}$
$\vec{P}+\vec{Q}=\vec{R}$	$\vec{Q}+\vec{P}=\vec{R}$

$$\therefore \quad \vec{P}+\vec{Q}=\vec{Q}+\vec{R}$$

(c) Polygon rule of addition of vectors

सदिशों के जोड़ का बहुभुज नियम -

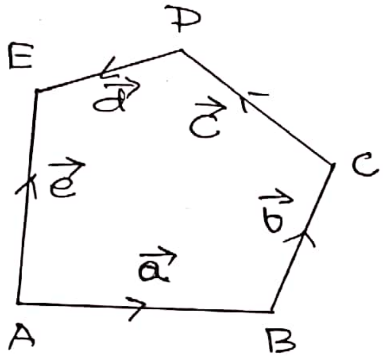
दो से अधिक vectors को add करने के लिए उन्हे इस प्रकार arrange करते हैं कि 2nd vector का initial point 1st vector का terminal point पर हो, 3rd vector का initial point 2nd vector का terminal point पर हो। इस प्रकार सभी vectors को arrange करलेने पर 1st vector का initial point से last vector का terminal point को मिलाने वाला line-segment resultant vectors sum को बतलाता है।

Figure में

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE} = \vec{AE}$$

$$\Rightarrow \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{e}$$

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE} = -\vec{EA}$$



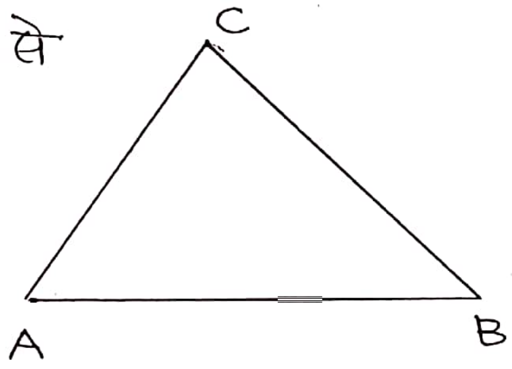
$$\therefore \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE} + \vec{EA} = 0$$

Triangle rule and polygon rule

Triangle ABC में polygon rule से

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{AB} + \vec{BC} = -\vec{CA}$$

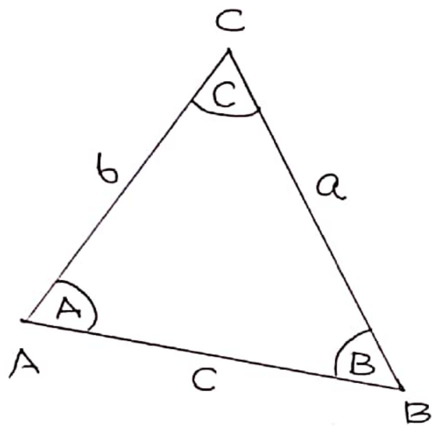


$$\therefore \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

This is triangle rule.

Scanned with CamScanner

Two important laws of triangle



Sine law

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Cosine law

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos A}$$

$$b = \sqrt{c^2 + a^2 - 2ca\cos B}$$

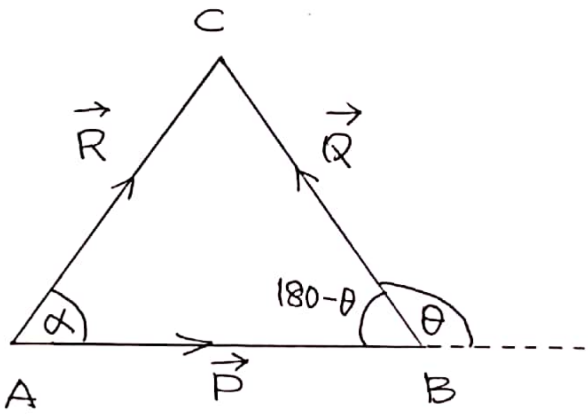
$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C}$$

Expression of magnitude and direction of Vector sum -

Let $\vec{AB} = \vec{P} \Rightarrow |\vec{P}| = AB$

$\vec{BC} = \vec{Q} \Rightarrow |\vec{Q}| = BC$

$\vec{AC} = \vec{R} \Rightarrow |\vec{R}| = AC$



According to triangle law

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$$

$$\therefore \vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$$

Let angle between $\vec{P}$ & $\vec{Q}$ is θ, then a/c to cosine law

$$AC = \sqrt{(AB)^2 + (BC)^2 - 2(AB)(BC)\cos(180-\theta)}$$

$$= \sqrt{(AB)^2 + (BC)^2 + 2(AB)(BC)\cos\theta}$$

as $\cos(180-\theta) = -\cos\theta$

In magnitude

$$|\vec{R}| = \sqrt{|\vec{P}|^2 + |\vec{Q}|^2 + 2|\vec{P}||\vec{Q}|\cos\theta} \quad \text{—— (A)}$$

Let $\vec{R}$ makes an angle of α with $\vec{P}$, then

a/c to sine law

$$\frac{AC}{\sin(180-\theta)} = \frac{BC}{\sin\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{|\vec{R}|}{\sin\theta} = \frac{|\vec{Q}|}{\sin\alpha}$$

$$\therefore \sin\alpha = \frac{|\vec{Q}|\sin\theta}{|\vec{R}|} \quad \text{—— (B)}$$

Also

$$\tan\alpha = \frac{|\vec{Q}|\sin\theta}{|\vec{P}| + |\vec{Q}|\cos\theta} \quad \text{—— (C)}$$

Special cases -

(1) When $\theta = 0°$, $\cos 0° = 1$ (maximum), then

$$|\vec{R}| = \sqrt{|\vec{P}|^2 + |\vec{Q}|^2 + 2|\vec{P}||\vec{Q}|(1)}$$

$$\therefore |\vec{R}| = |\vec{P}| + |\vec{Q}| \text{ max}^m.$$

&

$$\alpha = 0°$$

(2) When $\theta = 180°$, $\cos 180° = -1$ (minimum), then

$$|\vec{R}| = |\vec{P}| - |\vec{Q}| \text{ or } |\vec{Q}| - |\vec{P}| \text{ min.}$$

&

$$\alpha = 0°$$

(3) When $\theta = 90°$, $\cos 90° = 0$, then

$$|\vec{R}| = \sqrt{|\vec{P}|^2 + |\vec{Q}|^2}$$

&

$$\tan\alpha = \frac{|\vec{Q}|}{|\vec{P}|}$$

(4) When $|\vec{P}| = |\vec{Q}|$, then

$$|\vec{R}| = 2|\vec{P}|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$
&
$$\alpha = \frac{\theta}{2}$$

(5) When $|\vec{P}| = |\vec{Q}|$ and $\theta = 90^\circ$, then

$$|\vec{R}| = |\vec{P}|\sqrt{2} \quad \& \quad \alpha = 45^\circ$$

(6) When $|\vec{P}| = |\vec{Q}|$ and $\theta = 120^\circ$, then

$$|\vec{R}| = |\vec{P}| = |\vec{Q}|$$

Ex(1) - Magnitude of two coinitial forces are 8N and 6N. If angle between them is 0° then magnitude of resultant force will - (एक बिन्दु पर क्रियाशील दो forces के magnitude 8N एवं 6N हैं। यदि उनके बीच का angle 0° है तब resultant force का magnitude होगा।)

(A) 2N (B) 14 N (C) 10N (D) 12N

Ans - (B) Solⁿ Resultant force $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$

$$\theta = 0^\circ$$

$$\therefore |\vec{F}| = |\vec{F_1}| + |\vec{F_2}| = 8N + 6N = 14N$$

Ex(2) - एक point पर क्रियाशील दो forces के magnitude 8N एवं 6N हैं। यदि उनके बीच का angle 180° है तब resultant force का magnitude होगा -

(A) 2N (B) 14 N (C) 10N (D) 12N

Ans - (A)

Ex(3) - एक point पर क्रियाशील दो forces के magnitude 8N एवं 6N हैं। यदि उनके बीच का angle 90° है तब resultant force का magnitude होगा -

(A) 2N (B) 14N (C) 10N (D) 12N

Ans - (C)

Subtraction of Vectors सदिशों का घटाव

$\vec{C} = \vec{A} - \vec{B}$

$= \vec{A} + (-\vec{B})$

अर्थात $\vec{B}$ को $\vec{A}$ में subtract करने के लिए $\vec{B}$ का opposite को $\vec{A}$ में add किया जाता है।

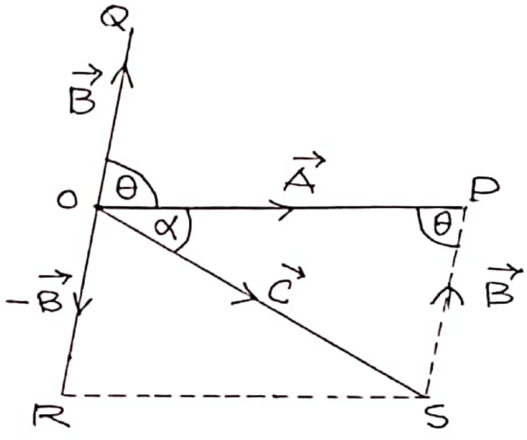


Figure में

$\vec{OP} = \vec{A}$, $\vec{OQ} = \vec{B}$

$\vec{OR} = -\vec{B}$, $\vec{OS} = \vec{C}$

$\triangle$ OPS में triangle law से

$\vec{C} = \vec{A} - \vec{B}$

$\triangle$ OPS में cosine law से

$$OS = \sqrt{(OP)^2 + (PS)^2 - 2(OP)(PS)\cos\theta}$$

$$\therefore |\vec{C}| = \sqrt{|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 - 2|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta} \quad \text{——— (A)}$$

$\triangle$ OPS में sine law से

$$\frac{PS}{\sin\alpha} = \frac{OS}{\sin\theta}$$

$$\frac{|\vec{B}|}{\sin\alpha} = \frac{|\vec{C}|}{\sin\theta}$$

$$\therefore \sin\alpha = \frac{|\vec{B}|\sin\theta}{|\vec{C}|} \quad \text{——— (B)}$$

Also

$$\tan\alpha = \frac{|\vec{B}|\sin\theta}{|\vec{A}| - |\vec{B}|\cos\theta} \quad \text{——— (C)}$$

Relation (A) का use, magnitude के लिए जबकि relation B एवं C का use direction ज्ञात करने के लिए किया जाता है।

Special cases -

(1) When $\theta = 0°$, $\cos 0° = 1$, then

$$|\vec{C}| = |\vec{A}| - |\vec{B}| \text{ if } |\vec{A}| > |\vec{B}| \text{ and } \alpha = 0°$$

or

$$|\vec{C}| = |\vec{B}| - |\vec{A}| \text{ if } |\vec{A}| < |\vec{B}| \text{ and } \beta = 180°$$

(2) When $\theta = 180°$, $\cos 180° = -1$, then

$$|\vec{C}| = |\vec{A}| + |\vec{B}| \text{ and } \alpha = 0°$$

(3) When $\theta = 90°$, $\cos 90° = 0$, then

$$|\vec{C}| = \sqrt{|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2}$$

$$\tan \alpha = \frac{|\vec{B}|}{|\vec{A}|}$$

(4) When $|\vec{A}| = |\vec{B}|$ then

$$|\vec{C}| = 2|\vec{A}| \sin(\theta/2)$$

$$\text{and } \alpha = 90° - \left(\frac{\theta}{2}\right)$$

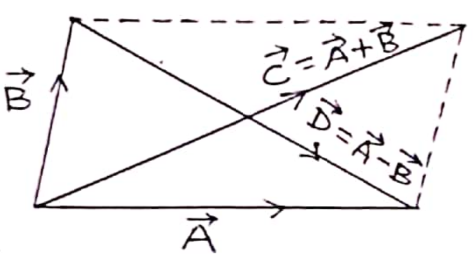
(5) When $|\vec{A}| = |\vec{B}|$ and $\theta = 90°$

then $|\vec{C}| = |\vec{A}|\sqrt{2}$

(6) When $|\vec{A}| = |\vec{B}|$ and $\theta = 60°$, then

$$|\vec{C}| = |\vec{A}| = |\vec{B}|$$

⇒ जब दो vectors के initial point को common रखकर दोनों vectors को adjacent side मानकर एक parallelogram बनाया जाता है तब जहाँ एक diagonal दोनों का sum को बतलाता है वहीं दूसरा diagonal दोनों vectors का difference को बतलाता है।



Ex (1) - एक car velocity 8 m/s से east की direction में गतिशील है, सड़क का एक मोड़ पर car north की direction में मुड़ता है तथा velocity 6 m/s हो जाता है। car का velocity में परिवर्तन है -

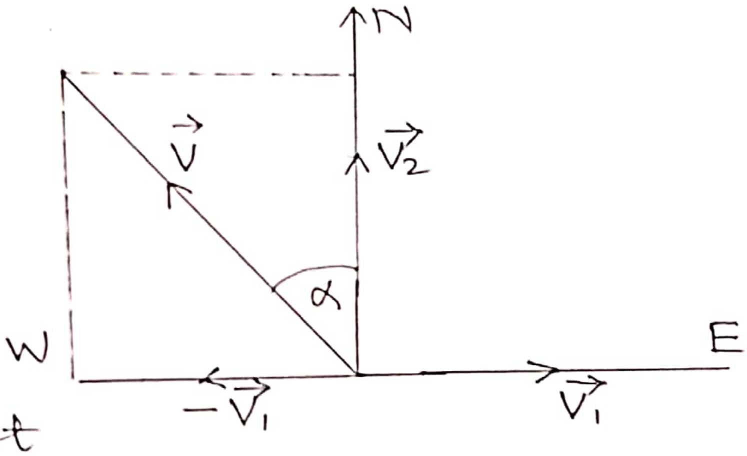
(A) 2 m/s east में (B) 2 m/s north में

(C) 10 m/s north से 53° west में

(D) 10 m/s west से 53° north में

Ans - (C)

Solⁿ.



$\vec{V_1} = 8$ m/s in east

$\vec{V_2} = 6$ m/s in north

Change in velocity

$\vec{V} = \vec{V_2} - \vec{V_1}$

$\theta = 90°$

$\therefore |\vec{V}| = \sqrt{|\vec{V_2}|^2 + |\vec{V_1}|^2}$

$= \sqrt{(6)^2 + (8)^2}$ m/s

$= \sqrt{36 + 64}$ m/s

$= \sqrt{100}$ m/s

$= 10$ m/s

Direction

$\tan\alpha = \frac{|\vec{V_1}|}{|\vec{V_2}|}$

$= \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = 53°$

⇒

$\theta = 90°$

$\therefore |R| = \sqrt{|\vec{P_2}|^2 + |\vec{P_1}|^2}$

$\sqrt{(16)^2 + (12)^2}$ NS

20 NS

Direction

$\tan \alpha = \frac{|\vec{P_1}|}{|\vec{P_2}|}$

$= \frac{12}{16}$

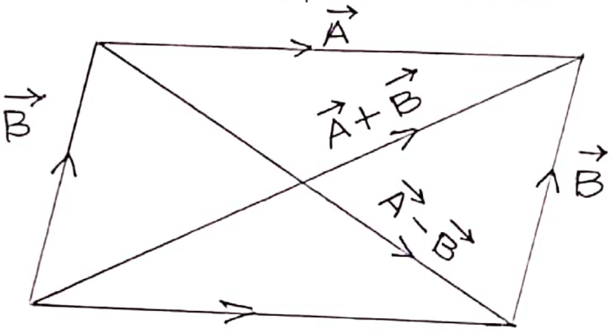
$= \frac{3}{4}$

$\tan^{-1}(3/4) = 37°$

= 5 N

Important points of addition and subtraction

(1) दो vectors के initial point को common रखते हुए दोनों के linesegments को adjacent sides मानकर parallelogram तैयार करने पर जहाँ इसका एक diagonal resultant sum को बतलाता है वहीं दूसरा diagonal resultant subtraction को बतलाता है।



(2) Vectors का addition commutative होता है -

$$\vec{A}+\vec{B} = \vec{B}+\vec{A}$$

(3) Vectors का subtraction commutative नहीं होता है -

$$\vec{A}-\vec{B} \neq \vec{B}-\vec{A}$$

(4) Let $\vec{R} = \vec{P}+\vec{Q}$ तब

$$|\vec{P}|-|\vec{Q}| \leq |\vec{R}| \leq |\vec{P}|+|\vec{Q}|$$

$$180^\circ \geq \theta \geq 0^\circ$$

(5) Let $\vec{R} = \vec{P}-\vec{Q}$ तब

$$|\vec{P}|-|\vec{Q}| \leq |\vec{R}| \leq |\vec{P}|+|\vec{Q}|$$

$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$$

(6) When $\vec{A}+\vec{B}=0$ then

$$\vec{A} = -\vec{B}$$

(7) When $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}=0$ then

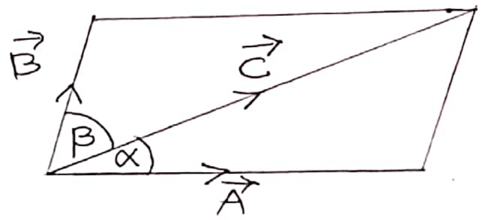
$\vec{A}+\vec{B}=-\vec{C}$ or $\vec{B}+\vec{C}=-\vec{A}$ or $\vec{C}+\vec{A}=-\vec{B}$

तीन vectors का addition sum केवल तभी 0 हो सकता है जबकि सबसे बड़ा vector का magnitude अन्य दोनों vectors की magnitude का sum से या तो small या equal हो।

(8) Let $\vec{C}=\vec{A}+\vec{B}$

α = angle between $\vec{C}$ & $\vec{A}$

β = angle between $\vec{C}$ & $\vec{B}$



then

(i) when $|\vec{A}|>|\vec{B}|$ then $\alpha<\beta$

(ii) when $|\vec{A}|<|\vec{B}|$ then $\alpha>\beta$

(iii) when $|\vec{A}|=|\vec{B}|$ then $\alpha=\beta$

⇒ Equal magnitude के vectors की न्यूनतम संख्या जिनका जोड़ 0 होता है – '2'.

⇒ Unequal magnitude के vectors की न्यूनतम संख्या जिनका जोड़ 0 होता है – '3'.

⇒ Equal magnitude के noncoplaner vectors की न्यूनतम संख्या जिनका जोड़ 0 होता है – '3'.

⇒ Unequal magnitude के noncoplaner vectors की न्यूनतम संख्या जिनका जोड़ 0 होता है। – '4'.

Resolution of vector and its component
सदिशों का वियोजन एवं उसका घटक

Component (घटक) – जब एक Vector के initial point एवं terminal point दोनों से एक line/axis पर perpendicular खींचा जाता है तब दोनों perpendiculars के बीच का distance को उस Vector का अभीष्ट line/axis में component कहा जाता है।

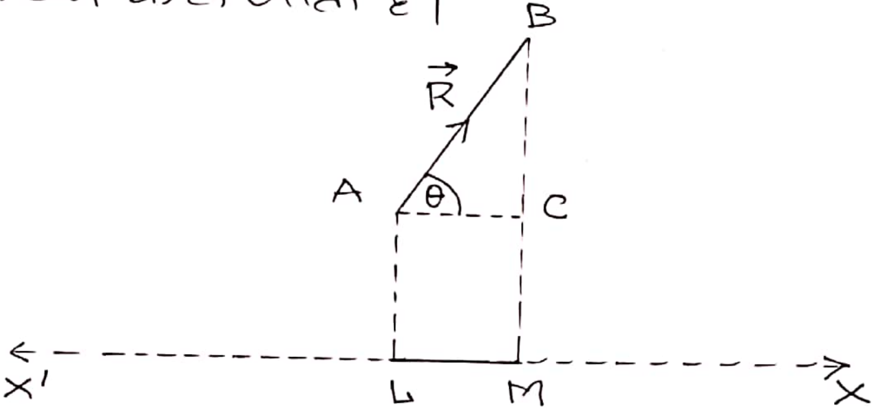


Figure में

$LM = AC = \vec{R}$ का $x'x$ की direction में component

$= \vec{R}$ का $x'x$ की direction में resolution part.

Measurement of component

माना $\vec{R}$ line $x'x$ के साथ angle θ बनाता है तब

△ ACB में

$\frac{AC}{AB} = \cos\theta$

$AC = AB\cos\theta$

$LM = AB\cos\theta$

$\therefore LM = |\vec{R}|\cos\theta$

अतः $\vec{R}$ का एक line angle θ पर component

$= |\vec{R}|\cos\theta$

⇒ Component एक scalar होता है।

⇒ Vector $\vec{R}$ का x-axis, Y-axis एवं Z-axis में component को क्रमशः R_x, R_y एवं R_z से संकेत किया जाता है।

Ex(1) - एक force जिसका magnitude 20N है का घटक (component) 30° का angle पर एक direction में ज्ञात करें।

(A) 10N (B) $10\sqrt{3}$ N (C) 15 N (D) 20N

Ans - (B) Soln:

$|\vec{F}| = 20N, \theta = 30°$

component $= |\vec{F}| \cos 30° = (20 N)(\sqrt{3}/2)$

$= 10\sqrt{3}$ N

Ex(2) - X-Y plane में अवस्थित velocity का magnitude 15 m s^{-1} है। यदि velocity x-axis के साथ 37° का angle बनाता है तब x-component एवं Y-component ज्ञात करें।

(A) 9 m s^{-1}, 12 m s^{-1} (B) 10 m s^{-1}, 5 m s^{-1}

(C) 12 m s^{-1}, 9 m s^{-1} (D) 7.5 m s^{-1}, 7.5 m s^{-1}

Ans - (C)

Soln:

$|\vec{V}| = 15$ m s^{-1}

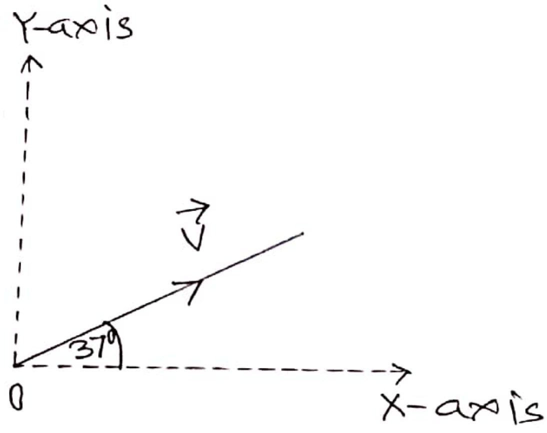
x-axis से angle

$\alpha = 37°$

$V_x = |\vec{V}| \cos\alpha = (15 m s^{-1}) \cos 37°$

$= (15 m s^{-1})(4/5)$

$= 12$ m s^{-1}



Y-axis से angle

$\beta = (90° - 37°) = 53°$

$V_y = |\vec{V}| \cos\beta = |\vec{V}| \cos 53°$

$= (15 m s^{-1})(3/5)$

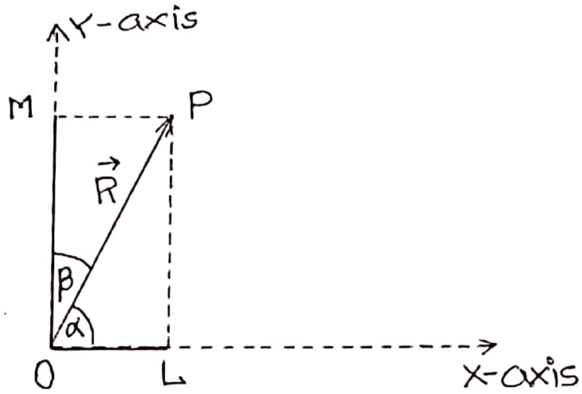
$= 9$ m s^{-1}

Resolution of vector –
सदिश का वियोजन

एक Vector को उसके components में तोड़ने की प्रक्रिया resolution of vector कहलाता है।

Resolution in plane (समतल में वियोजन)

$\vec{R} = \vec{OP}$ को x-y plane में माना जो x-axis से angle α एवं Y-axis से angle β बनाते हैं।



$\vec{R}$ का x-component

$R_x = OL = |\vec{R}| \cos\alpha$

$\vec{R}$ का y-component

$R_y = OM = |\vec{R}| \cos\beta$

$= |\vec{R}| \cos(90 - \alpha)$

$= |\vec{R}| \sin\alpha$

A/c to parallelogram law in OLPM

$\vec{OP} = \vec{OL} + \vec{OM}$

$= (OL)\hat{i} + (OM)\hat{j}$

$\therefore \boxed{\vec{R} = R_x\hat{i} + R_y\hat{j}}$

Also

$\vec{R} = |\vec{R}|\cos\alpha\,\hat{i} + |\vec{R}|\sin\alpha\,\hat{j}$

In rectangle OLPM

$OP = \sqrt{(OL)^2 + (OM)^2}$

$\therefore \boxed{|\vec{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}}$

$\vec{R}$ का x-axis से direction

$$\cos\alpha = \frac{R_x}{|\vec{R}|} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{R_x}{|\vec{R}|}\right)$$

$$\tan\alpha = \frac{R_y}{R_x} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{R_y}{R_x}\right)$$

$\vec{R}$ का y-axis से direction

$$\cos\beta = \frac{R_y}{|\vec{R}|} \Rightarrow \beta = \cos^{-1}\left(\frac{R_y}{|\vec{R}|}\right)$$

$\Rightarrow$ $\vec{R}$ की direction में unit vector

$$\hat{u} = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} = \cos\alpha\,\hat{i} + \sin\alpha\,\hat{j}$$

Ex(1) - $\vec{A} = 6m\,\hat{i} + 8m\,\hat{j}$ का magnitude है-

(A) 6m (B) 14m (C) 10m (D) 2m

Ans - (C)

सोल॰ $\vec{A} = 6m\,\hat{i} + 8m\,\hat{j}$

जैसा कि $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$

अतः $A_x = 6m, A_y = 8m$

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{6^2+8^2} = 10m$$

Ex(2) - $\vec{A} = 6m\,\hat{i} + 8m\,\hat{j}$ का x-axis के साथ angle है -

(A) 30° (B) 60° (C) 37° (D) 53°

Ans - (C)

सोल॰ $\vec{A} = 6m\,\hat{i} + 8m\,\hat{j}$

x-axis से angle

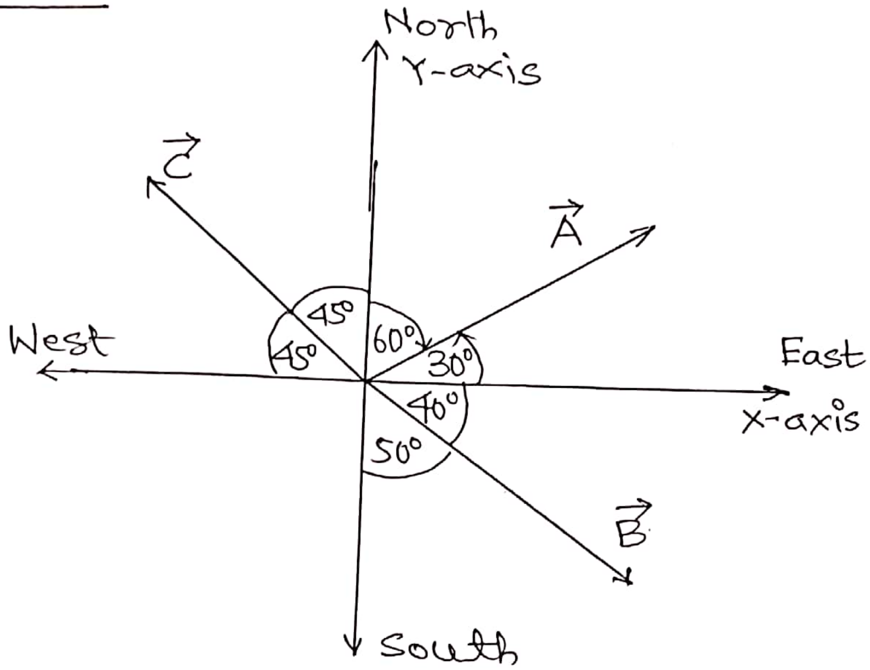
$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{A_y}{A_x}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{8}{6}\right)$$

$$= \tan^{-1}(4/3)$$

$\therefore \alpha = 37°$

Direction convention



$\vec{A}$ is at 30° north of east

$\vec{A}$ is at 60° east of north

$\vec{B}$ is at 40° south of east

$\vec{B}$ is at 50° east of south

$\vec{C}$ is along north-west

$\vec{C}$ is along west-north.

Angle convention

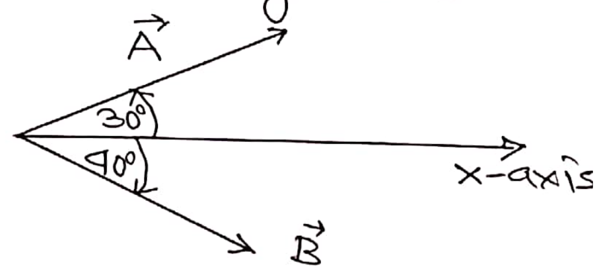
When angle of number of vectors are taken with an axis. If an angle in anticlockwise is taken as positive, then an angle in clockwise sense is taken as negative.

Angle of $\vec{A}$ with x-axis

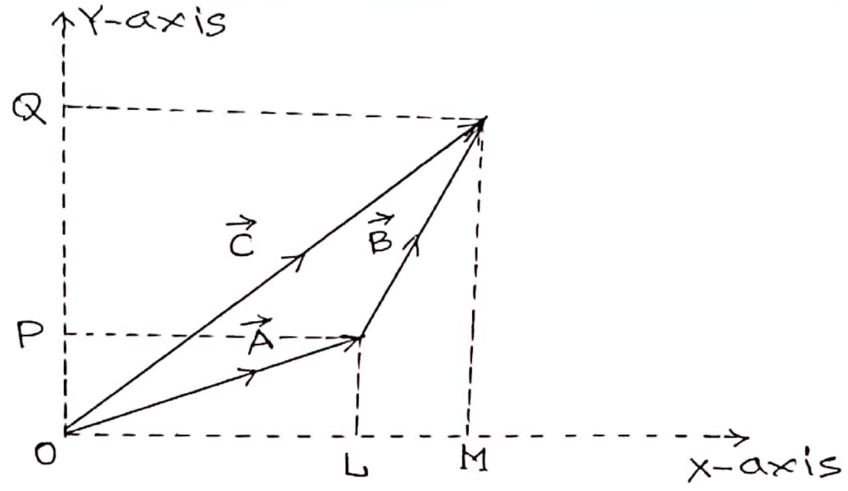
$\theta_1 = 30°$

Angle of $\vec{B}$ with x-axis

$\theta_2 = -40° = 320°$



Addition of vectors by resolution



In figure

$OL = A_x$, $LM = B_x$, $OM = C_x$

$OP = A_y$, $PQ = B_y$, $OQ = C_y$

A/c to triangle law

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$

As $OM = OL + LM$

$\therefore \quad C_x = A_x + B_x$

Also $OQ = OP + PQ$

$\therefore \quad C_y = A_y + B_y$

Clearly, when

$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} - \vec{C}$, then

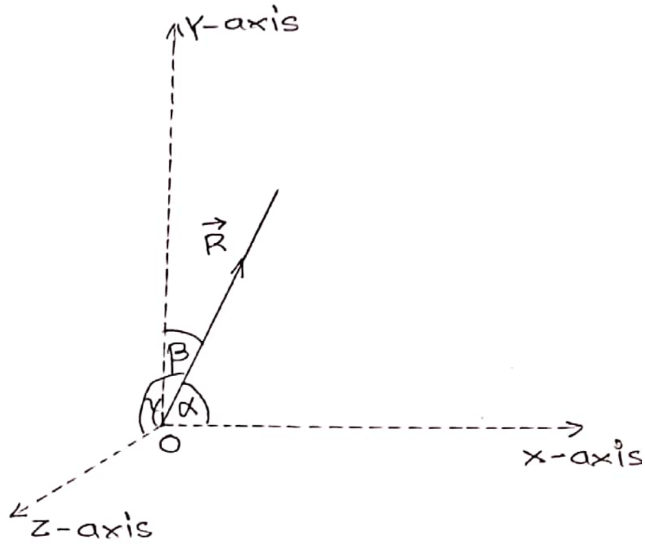
$$R_x = A_x + B_x - C_x$$

and

$$R_y = A_y + B_y - C_y$$

Resolution in space

Suppose a vector $\vec{R}$ in space which makes angles α, β and γ with x-axis, y-axis and z-axis respectively.



x- component of $\vec{R}$

$$R_x = |\vec{R}| \cos\alpha$$

y- component of $\vec{R}$

$$R_y = |\vec{R}| \cos\beta$$

z- component of $\vec{R}$

$$R_z = |\vec{R}| \cos\gamma$$

Vector $\vec{R}$ in component form

$$\vec{R} = R_x \hat{i} + R_y \hat{j} + R_z \hat{k}$$

In magnitude

$$|\vec{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

Direction of $\vec{R}$ with x-axis

$$\cos\alpha = \frac{R_x}{|\vec{R}|}, \quad \tan\alpha = \frac{\sqrt{R_y^2 + R_z^2}}{R_x}$$

Direction of $\vec{R}$ with Y-axis

$$\cos\beta = \frac{R_y}{|\vec{R}|}, \quad \tan\beta = \frac{\sqrt{R_x^2 + R_z^2}}{R_y}$$

Direction of $\vec{R}$ with z-axis

$$\cos\gamma = \frac{R_z}{|\vec{R}|}, \quad \tan\gamma = \frac{\sqrt{R_x^2 + R_y^2}}{R_z}$$

Direction cosines - conventionally $\cos\alpha$, $\cos\beta$ and $\cos\gamma$ are denoted by l, m and n respectively and are known as direction cosines. so

$$l = \cos\alpha = \frac{R_x}{|\vec{R}|}, \quad m = \cos\beta = \frac{R_y}{|\vec{R}|}, \quad n = \cos\gamma = \frac{R_z}{|\vec{R}|}$$

Now $\vec{R} = R_x\hat{i} + R_y\hat{j} + R_z\hat{k}$

$= |\vec{R}|\cos\alpha\,\hat{i} + |\vec{R}|\cos\beta\,\hat{j} + |\vec{R}|\cos\gamma\,\hat{k}$

$= |\vec{R}|\,(\cos\alpha\,\hat{i} + \cos\beta\,\hat{j} + \cos\gamma\,\hat{k})$

$\therefore\ \vec{R} = |\vec{R}|\,(l\hat{i} + m\hat{j} + n\hat{k})$

A unit vector along $\vec{R}$

$$\hat{u} = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} = l\hat{i} + m\hat{j} + n\hat{k}$$

Ex(1) - When $\vec{A} = 6m\hat{i} + 2m\hat{j} - 3m\hat{k}$, then magnitude of $\vec{A}$ is

(A) 3m (B) 4m (C) 6m (D) 7m

Ans - (D) Soln. $\vec{A} = 6m\hat{i} + 2m\hat{j} + 3m\hat{k}$

here $A_x = 6m,\ A_y = 2m,\ A_z = -3m$

$\therefore |\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = \sqrt{6^2 + 2^2 + (-3)^2}\ m$

$= \sqrt{36 + 4 + 9}\ m = \sqrt{49}\ m = 7m$

Ex(2) - When $\vec{A} = 6m\hat{i} + 2m\hat{j} - 3m\hat{k}$, then to find direction cosines of $\vec{A}$.

(A) $l = \frac{6}{7},\ m = \frac{2}{7},\ n = \frac{-3}{7}$ (B) $l = \frac{6}{7},\ m = \frac{2}{7},\ n = \frac{3}{7}$

(C) $l = \frac{2}{7},\ m = \frac{6}{7},\ n = \frac{3}{7}$ (D) None of these

Ans - (A) Soln

$l = \cos\alpha = \frac{A_x}{|\vec{A}|} = \frac{6}{7},\ m = \cos\beta = \frac{A_y}{|\vec{A}|} = \frac{2}{3},\ n = \cos\gamma = \frac{A_z}{|\vec{A}|} = \frac{-3}{7}$

Ex(3) - When $\vec{A} = 6m\hat{i} + 2m\hat{j} - 3m\hat{k}$, then to find a unit vector along $\vec{A}$.

(A) $\frac{2}{7}\hat{i} - \frac{3}{7}\hat{j} + \frac{6}{7}\hat{k}$ (B) $\frac{6}{7}\hat{i} + \frac{2}{7}\hat{j} + \frac{3}{7}\hat{k}$

(C) $\frac{6}{7}\hat{i} + \frac{2}{7}\hat{j} - \frac{3}{7}\hat{k}$ (D) None of these

Ans - (C) Soln

$\hat{u} = l\hat{i} + m\hat{j} + n\hat{k} = \frac{6}{7}\hat{i} + \frac{2}{7}\hat{j} - \frac{3}{7}\hat{k}$

Multiplication of Vector

(A) With numerical value – जब एक Vector को numerical value के साथ multiply किया जाता है तब
आंकिक मान के साथ

(i) Resultant भी एक vector होता है।
(ii) Magnitude change कर जाता है।
(iii) Unit change नहीं करता है।
(iv) Positive numerical value के साथ direction नहीं बदलता है जबकि negative numerical value के साथ direction opposite हो जाता है।

ex – Let $\vec{a}$ = 2.4 m along east

$5\vec{a} = 5(2.4\text{ m along east})$
$= 12\text{ m along east}$

$-5\vec{a} = -5(2.4\text{ m along east})$
$= -12\text{ m along east}$
$= 12\text{ m along west.}$

(B) With scalar – जब एक Vector को एक scalar के साथ multiply किया जाता है तब :

(i) Resultant भी एक Vector होता है।
(ii) Magnitude change कर जाता है।
(iii) Unit change कर जाता है।
(iv) Direction change नहीं करता है।

Ex – Force $\vec{F} = m\vec{a}$

Momentum $\vec{P} = m\vec{V}$

Impulse $\vec{I} = \vec{F}\Delta t$

Let mass m = 5 kg

acceleration $\vec{a} = 2\,m\,s^{-2}$ along east

Force $\vec{F} = m\vec{a}$

$= (5\text{ kg})(2\,m\,s^{-2}\text{ along east})$

$= 10\text{ kg}\,m\,s^{-2}\text{ along east}$

$= 10\text{ N along east.}$

(C) With Vector – Vector को vector के साथ दो process से multiply किया जाता है।

(1) scalar product
अदिश गुणनफल
(2) Vector product
सदिश गुणनफल

Scalar product/dot product – vector को vector के साथ multiply करने का वह process जिसमें resultant एक scalar होता है, scalar product कहलाता है।

⇒ $\vec{A}$ एवं $\vec{B}$ के scalar product को $\vec{A}\cdot\vec{B}$ लिखा जाता है

⇒ यदि $\vec{A}$ एवं $\vec{B}$ के बीच का angle θ हो तब

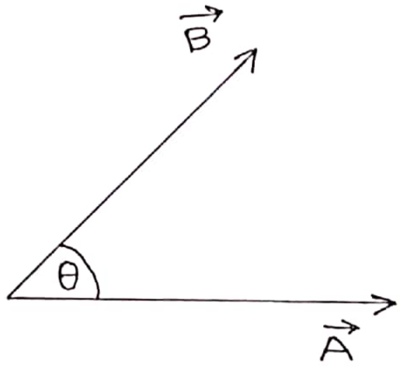
$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$$

⇒ दो vectors का scalar product किसी एक vector का magnitude तथा दूसरा vector का पहला vector की direction में component का गुणनफल होता है।

Figure में

$|\vec{B}|\cos\theta$ = $\vec{B}$ का $\vec{A}$ की direction में component

$|\vec{A}|\cos\theta$ = $\vec{A}$ का $\vec{B}$ की direction में component



Where

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$$

$$= |\vec{A}|(|\vec{B}|\cos\theta)$$

$$= |\vec{B}|(|\vec{A}|\cos\theta)$$

Scalar product of unit vectors

$\hat{i}\cdot\hat{i} = |\hat{i}||\hat{i}|\cos 0^\circ = (1)(1)(1) = 1$

$\therefore \hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1$

$\hat{i}\cdot\hat{j} = |\hat{i}||\hat{j}|\cos 90^\circ = (1)(1)(0) = 0$

$\therefore \hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{j}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{i} = 0$

Scalar product in component form

Let $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$

$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$

$\vec{A}\cdot\vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})\cdot(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$

$= (A_xB_x)\,\hat{i}\cdot\hat{i} + (A_xB_y)\,\hat{i}\cdot\hat{j} + (A_xB_z)\,\hat{i}\cdot\hat{k} + (A_yB_x)\,\hat{j}\cdot\hat{i}$
$+ (A_yB_y)\,\hat{j}\cdot\hat{j} + (A_yB_z)\,\hat{j}\cdot\hat{k} + (A_zB_x)\,\hat{k}\cdot\hat{i} + (A_zB_y)\,\hat{k}\cdot\hat{j}$
$+ (A_zB_z)\,\hat{k}\cdot\hat{k}$

$\therefore \vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$

Properties of scalar product

(1) एक vector का खुद उसी के साथ scalar product उस vector का square के बराबर होता है।
$\vec{A}\cdot\vec{A} = \vec{A}^2 = |\vec{A}|^2$

(2) दो perpendicular vectors का scalar product 0 होता है।
When $\vec{A}\perp\vec{B}$ then $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$

(3) जब दो vectors का scalar product 0 होता है तब वे vectors perpendicular होते हैं।
When $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$ then $\vec{A}\perp\vec{B}$

(4) Identical unit vectors का scalar product 1 होता है।
$\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1$

(5) Perpendicular unit vectors का scalar product 0 होता है।
$\hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{j}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{i} = 0$

(6) Scalar product commutative law (क्रम विनिमय नियम) का पालन करता है।

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$$

(7) Scalar product associative law (साहचर्य नियम) का पालन करता है।

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\cdot\vec{C}) = (\vec{A}\cdot\vec{B})\cdot\vec{C}$$

(8) Scalar product distributive law (बंटन नियम) का पालन करता है।

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C}$$

Uses of scalar product

(1) To prove two vectors are perpendicular
दो vectors को perpendicular सिद्ध करना

$\Rightarrow \quad \vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$

When $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$ then $\cos\theta = 0$

$\Rightarrow \theta = 90^\circ$

$\therefore \vec{A} \perp \vec{B}$

(2) To find angle between two vectors
दो vectors के बीच का angle ज्ञात करना

$\Rightarrow \quad \vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}$$

(3) To find component of a vector along another vector
एक vector का दूसरा vector की direction में component ज्ञात करना

$\Rightarrow \quad \vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$

$$\therefore \text{component of } \vec{A} \text{ along } \vec{B} = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{B}|}$$

and

$$\text{component of } \vec{B} \text{ along } \vec{A} = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}|}$$

Ex.(1) - 20N का force के द्वारा एक वस्तु में 6m का displacement force की direction से 60° पर प्राप्त होता है। Force के द्वारा workdone है।

(A) 15 J (B) 30 J (C) 60 J (D) 10 J

Ans - (C) हलः $W = FS\cos\theta = (20N)(6m)(\frac{1}{2}) = 60J$

Ex(2) - Force $\vec{F} = (6\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k})N$ के अधीन एक वस्तु का displacement $\vec{S} = (2\hat{i} + 5\hat{j} + 4\hat{k})m$ प्राप्त होता है, Force के द्वारा work है -

(A) 10 J (B) 20 J (C) 15 J (D) None of these

Ans - (A)

हलः $\vec{F} = (6\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k})N$, $\vec{S} = (2\hat{i} + 5\hat{j} + 4\hat{k})m$

work

$$W = \vec{F}\cdot\vec{S} = F_xS_x + F_yS_y + F_zS_z$$
$$= [(6)(2) + (2)(5) + (-3)(4)]J$$
$$= (12 + 10 - 12)J$$
$$= 10J$$

Ex(3) - Vector $\vec{A} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}$ एवं $\vec{B} = 6\hat{i} + 8\hat{j} + 10\hat{k}$ के बीच का angle है -

(A) 0° (B) 180° (C) 90° (D) 45°

Ans - (A)

हलः $\vec{A} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k} \Rightarrow |\vec{A}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$

$\vec{B} = 6\hat{i} + 8\hat{j} + 10\hat{k} \Rightarrow |\vec{B}| = \sqrt{6^2 + 8^2 + (10)^2} = 10\sqrt{2}$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = (3)(6) + (4)(8) + (5)(10)$$
$$= 18 + 32 + 50$$
$$= 100$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} = \frac{100}{(5\sqrt{2})(10\sqrt{2})} = 1$$

$$\theta = 0°$$

Ex(4) - Vector $(\hat{i} + \hat{j})$ एवं vector $(\hat{i} + \hat{k})$ के बीच का angle है -

(A) 90° (B) 180° (C) 0° (D) 60°

Ans - (D)

Vector product –

सदिश गुणनफल – Vector को Vector के साथ multiply करने का वह process, जिसमें resultant भी एक vector होता है, vector product कहलाता है।

⇒ Vector $\vec{A}$ का vector $\vec{B}$ के साथ Vector product को $\vec{A}\times\vec{B}$ लिखा जाता है तथा इसे vector $\vec{A}$ cross Vector $\vec{B}$ लिखा जाता है।

⇒ Let $\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B}$

$\vec{A}$ एवं $\vec{B}$ के बीच का angle $= \theta$, तब

Magnitude में

$$|\vec{C}| = |\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta$$

Direction के साथ

$$|\vec{C}| = |\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta\,\hat{n}$$

where $\hat{n}$ = $\vec{C}$ की direction में unit vector.

Direction of vector product – Vector product की direction को right hand palm rule से ज्ञात किया जाता है।

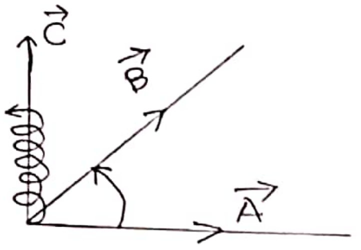
⇒ Vector product का resultant दोनों vectors की plane का perpendicular direction में होता है।

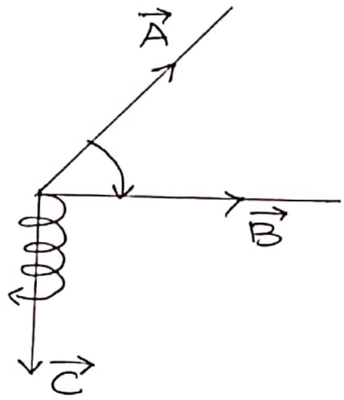
⇒ जब right hand की stretched palm को दोनों vectors की plane का perpendicular इस प्रकार रखा जाता है कि प्रारंभ में fingers पहला vector की direction में हो, मोड़ने पर दूसरा vector की direction में जाते हैं तब thumb की direction resultant vector की direction को बतलाता है।

⇒ जब first vector से second vector का sense of rotation anticlockwise होता है तब resultant vector plane का perpendicular outside होता है –

⇒ जब first vector से second vector का sense of rotation clockwise होता है तब resultant vector product दोनों vectors की plane का perpendicular inside होता है।

$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$





Examples of Vector product

(i) Torque $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ where, $\vec{r}$ = displacement, $\vec{F}$ = force

(ii) Angular momentum

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$ where, r = displacement, $\vec{P}$ = linear momentum

(iii) Linear velocity

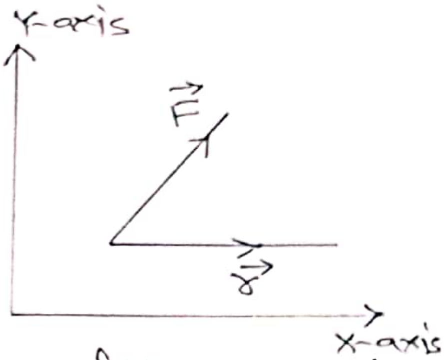
$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ where, $\vec{\omega}$ = angular velocity, $\vec{r}$ = radial vector

(iv) Linear acceleration

$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r}$ where $\vec{\alpha}$ = angular acceleration, $\vec{r}$ = radial vector.

Ex(1) - नीचे दिखलाएँ गए figure में torque का direction है-

(A) Positive z-axis
(B) Negative z-axis
(C) Y-axis
(D) X-axis

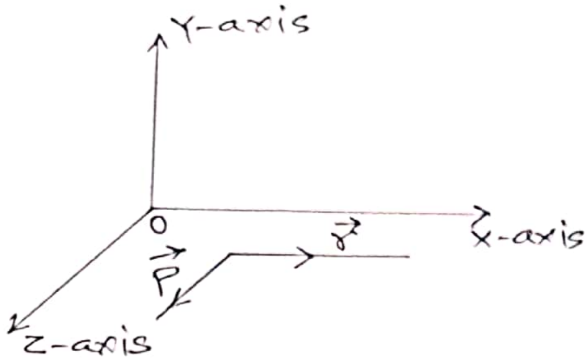


Ans- (A) Hints - Torque

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Ex(2) - नीचे दिखलाएँ गए figure में angular momentum का direction है।-

(A) Positive Y-axis
(B) Negative Y-axis
(C) Z-axis
(D) X-axis



Ans - (B) Hints -

Angular momentum

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$$

Ex(3) - यदि displacement 6 m Y-axis में तथा force 12 N x-axis में हो तब torque होगा।

(A) 72 N m in z-axis
(B) 72 N m in negative z-axis
(C) 36 N m in z-axis
(D) 36 N m in negative z-axis

Ans- (B)

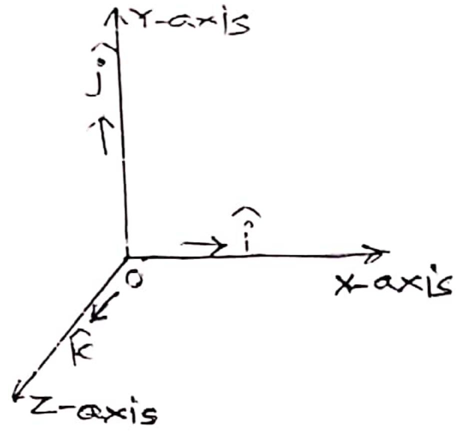
Ex(4) - यदि एक particle का displacement 10 m Y-axis में तथा linear momentum 6 kg m s^{-1} z-axis में है, तब angular momentum होगा।

(A) 60 kg m^2 s^{-1} in X-axis
(B) 60 kg m^2 s^{-1} in negative X-axis
(C) 30 kg m^2 s^{-1} in X-axis
(D) 30 kg m^2 s^{-1} in negative x axis

Ans -(A)

Scanned with CamScanner

Vector product of unit vectors



$\hat{i} \times \hat{i} = |\hat{i}||\hat{i}| \sin 0^\circ = 0$

$\therefore \hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$

$\hat{i} \times \hat{j} = |\hat{i}||\hat{j}| \sin 90^\circ \hat{k}$

$\therefore \hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$ | $\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}$

$\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$ | $\hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}$

$\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$ | $\hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}$

Vector product in component form

Let $\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$

$\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i} \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix}$$

$$= (A_y B_z - B_y A_z)\hat{i} - (A_x B_z - B_x A_z)\hat{j} + (A_x B_y - B_x A_y)\hat{k}$$

Properties of vector product

(1) एक Vector का खुद उसी के साथ Vector product 0 होता है।

$\vec{A} \times \vec{A} = 0$

(2) दो parallel vectors का vector product 0 होता है।

यदि $\vec{A} \parallel \vec{B}$ तब $\vec{A} \times \vec{A} = 0$

(3) जब दो vectors का vector product 0 होता है तब वे दोनों vectors parallel होते हैं।

यदि $\vec{A} \times \vec{B} = 0$ तब $\vec{A} \parallel \vec{B}$.

(4) Identical unit vectors का vector product 0 होता है।

$$\hat{i}\times\hat{i} = \hat{j}\times\hat{j} = \hat{k}\times\hat{k} = 0$$

(5) Perpendicular unit vectors का vector product भी एक unit vector होता है।

$\hat{i}\times\hat{j} = \hat{k}$	$\hat{j}\times\hat{i} = -\hat{k}$
$\hat{j}\times\hat{k} = \hat{i}$	$\hat{k}\times\hat{j} = -\hat{i}$
$\hat{k}\times\hat{i} = \hat{j}$	$\hat{i}\times\hat{k} = -\hat{j}$

(6) Vector product commutative law को follow नहीं करता है।

$$\vec{A}\times\vec{B} \neq \vec{B}\times\vec{A}$$

but $\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$

(7) Vector product associative law को follow नहीं करता है।

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) \neq (\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}$$

(8) Vector product distributive law को follow करता है।

$$\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\times\vec{B} + \vec{A}\times\vec{C}$$

Uses of vector product

(1) दो vectors के बीच का angle ज्ञात करना

To find angle between two vectors

As $|\vec{A}\times\vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta$

$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$

So $\tan\theta = \dfrac{|\vec{A}\times\vec{B}|}{\vec{A}\cdot\vec{B}}$

(2) दो vectors को parallel सिद्ध करना

To prove two vectors are parallel

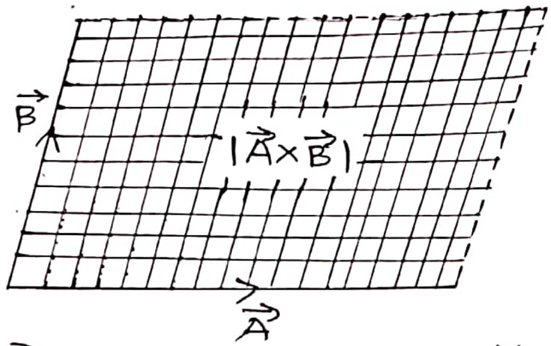
As $|\vec{A}\times\vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta$

when $\vec{A}\times\vec{B} = 0$, then $\sin\theta = 0$

$\therefore \vec{A} \parallel \vec{B}$.

(3) Vectors के द्वारा निर्मित geometrical construction का area ज्ञात करना -

$|\vec{A}\times\vec{B}|$ = $\vec{A}$ एवं $\vec{B}$ के द्वारा निर्मित parallelogram का area.



(4) एक vector का दूसरा vector के perpendicular direction में component ज्ञात करना।

Component of $\vec{A}$ perpendicular to $\vec{B}$

$$\vec{C} = \vec{A} - \left(\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{B}|^2}\right)\times\vec{B}$$

$$= \vec{A} - (\vec{A}\cdot\hat{B})\times\hat{B}$$

Ex- Vector $\vec{A} = (3\hat{i}+4\hat{j})$ का $\vec{B} = (\hat{i}+\hat{j})$ का perpendicular direction में component होगा।

(A) $\frac{1}{2}(\hat{j}-\hat{i})$ (B) $\frac{3}{2}(\hat{j}+\hat{i})$

(C) $\frac{5}{2}(\hat{j}+\hat{i})$ (D) $\frac{7}{2}(\hat{j}+\hat{i})$

Ans - (A)

Sol' $\vec{A}$ का $\vec{B}$ के perpendicular direction में component

$$\vec{C} = \vec{A} - \frac{(\vec{A}\cdot\vec{B})}{|\vec{B}|^2}\times\vec{B}$$ where $\vec{A} = 3\hat{i}+4\hat{j}$

$\vec{B} = \hat{i}+\hat{j} \Rightarrow |\vec{B}| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$\vec{A}\cdot\vec{B} = (3)(1)+(4)(1)$
$= 7$

$$= (3\hat{i}+4\hat{j}) - \frac{7}{(\sqrt{2})^2}(\hat{i}+\hat{j})$$

$$= 3\hat{i}+4\hat{j} - \frac{7}{2}\hat{i} - \frac{7}{2}\hat{j}$$

$$= \left(3-\frac{7}{2}\right)\hat{i} + \left(4-\frac{7}{2}\right)\hat{j}$$

$$= -\frac{\hat{i}}{2} + \frac{\hat{j}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(\hat{j}-\hat{i})$$

Triple scalar product

त्रि अदिश गुणनफल

तीन vectors $\vec{A}$, $\vec{B}$ एवं $\vec{C}$ के triple scalar product को $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$ या $[\vec{A}\,\vec{B}\,\vec{C}]$ लिखा जाता है।

⇒ Triple scalar product का resultant एक scalar होता है।

⇒ एक ही order में triple scalar product equal होता है।

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A}) = \vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})$$

⇒ Opposite order में triple scalar product opposite होता है।

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = -\vec{A}\cdot(\vec{C}\times\vec{B})$$

⇒ Let $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$

$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$

$\vec{C} = C_x\hat{i} + C_y\hat{j} + C_z\hat{k}$, then

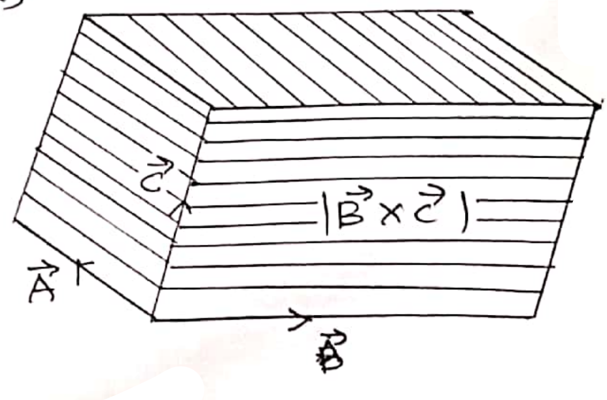
$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

⇒ Triple scalar product तीनों vectors के द्वारा बनने वाला parallelopiped की volume के equal होता है।

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = |\vec{A}| \times \text{component of } (\vec{B}\times\vec{C}) \text{ along } \vec{A}$$

$$= (\text{length})(\text{Area})$$

$$= \text{Volume}$$



⇒ जब $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = 0$ तब $\vec{A}$, $\vec{B}$ एवं $\vec{C}$ coplaner होते हैं।

Triple vector product

त्रि सदिश गुणनफल

तीन vectors $\vec{A}$, $\vec{B}$ एवं $\vec{C}$ के triple vector product को $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$ लिखा जाता है।

⇒ Triple vector product का resultant भी एक vector होता है।

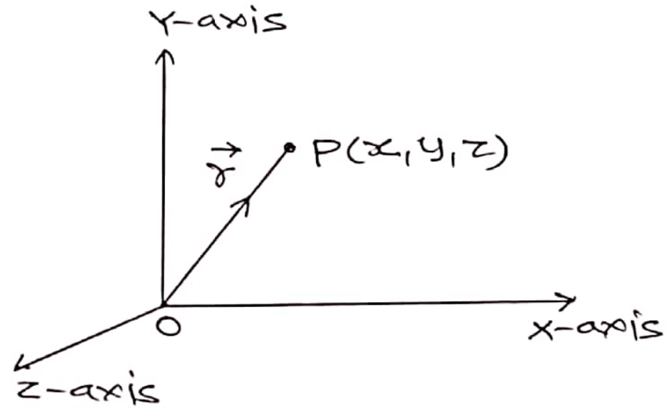
⇒ $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B} - (\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$

$\vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{A}) = (\vec{B}\cdot\vec{A})\vec{C} - (\vec{B}\cdot\vec{C})\vec{A}$

$\vec{C}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = (\vec{C}\cdot\vec{B})\vec{A} - (\vec{C}\cdot\vec{A})\vec{B}$

Position vector (स्थिति सदिश) - origin (मूल बिन्दु) या reference point (निर्देश बिन्दु) से एक particle की position को मिलाने वाला line-segment position vector कहलाता है।

माना एक particle का position $P(x, y, z)$ है तब position vector



$\vec{OP} = \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

⇒ $|\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Displacement (विस्थापन) - Initial position से final position को मिलाते वाला line-segment displacement कहलाता है।

माना एक particle का position $A(x_1, y_1, z_1)$ से $B(x_2, y_2, z_2)$ हो जाता है, तब

Initial position vector

$\vec{r}_1 = \vec{OA} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$

Final position vector

$\vec{r}_2 = \vec{OB} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}$

Displacement

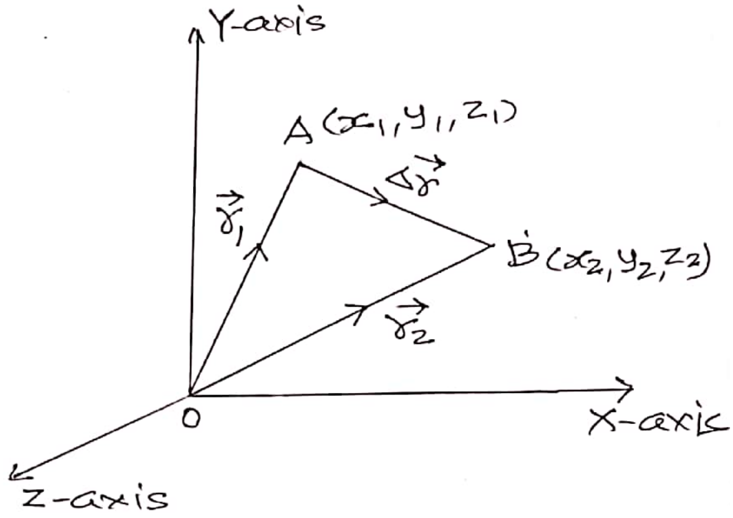
$\vec{\Delta r} = \vec{AB}$

Triangle law से

$\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$

$\Rightarrow \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{\Delta r} = \vec{r_2} - \vec{r_1}}$



Also

$\vec{\Delta r} = (x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}) - (x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k})$

$\therefore \boxed{\vec{\Delta r} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}}$

Ex- Force $\vec{F} = (6\hat{i} + 8\hat{j} - 5\hat{k})N$ के अधीन एक particle का position (2m, 1m, -3m) से (5m, 4m, 2m) हो जाता है, Force के द्वारा किया गया work ज्ञात करें।

Sol. From question

$\vec{F} = (6\hat{i} + 8\hat{j} - 5\hat{k})N$

Initial position $(x_1 = 2m, y_1 = 1m, z_1 = -3m)$

Final position $(x_2 = 5m, y_2 = 4m, z_2 = 2m)$

Displacement

$\vec{\Delta r} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$

$= (5-2)m\,\hat{i} + (4-1)m\,\hat{j} + (2+3)m\,\hat{k}$

$\therefore \vec{S} = \vec{\Delta r} = (3\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k})m$

Work $W = \vec{F} \cdot \vec{S}$

$= (6)(3) + (8)(3) + (-5)(5)$

$= (18 + 24 - 25)J$

$= 17J$